

アルキメデス立体のすべての頂点を一筆書きで行く？

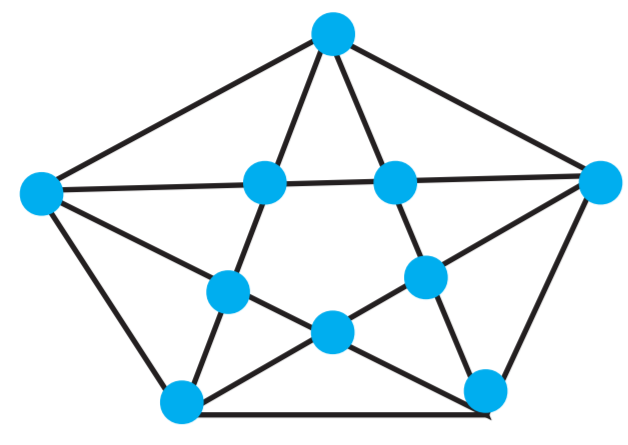
半正多面体上でのハミルトン閉路探索



沖縄県立球陽中学校 2年 上地 明德

解けたら賞金100万ドル!

アメリカのクレイ数学研究所が20世紀にミレニアム懸賞問題という形で発表した7つの未解決問題! その一つにNP≠P予想という問題があり、この問題の解決策の一つに、グラフ理論のハミルトン閉路が関わっています。



ハミルトン閉路ありますか?

私はこの問題の意味を理解するのに時間がかかりました。

ハミルトン閉路をもつかどうかの判別法はまだまだに分かっておらず、非常に難しい問題となっています。完全な判別法を見つけたら賞金ゲット! です。

グラフとは? ハミルトン閉路って?

グラフ理論で単に「グラフ」といういくつかの点と、二つの点を繋ぐ線からなるものを意味します(図1)。鉄道の線路図もラインなどのソーシャルネットワークもグラフです。また、ここにグラフがあると、辺を辿りながら全部の点を一回ずつ通って最初の点に戻って来られたら、それがハミルトン閉路です。(図2・赤)。

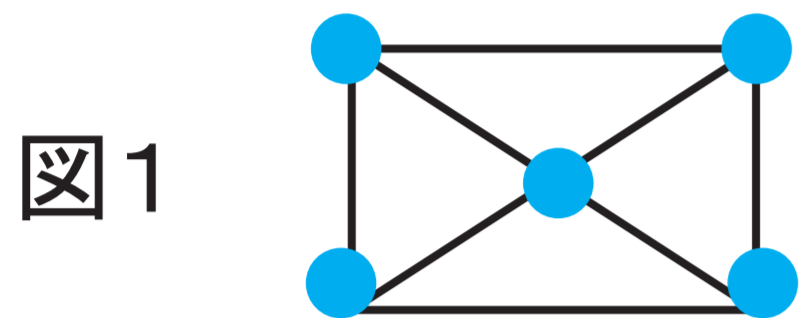


図1

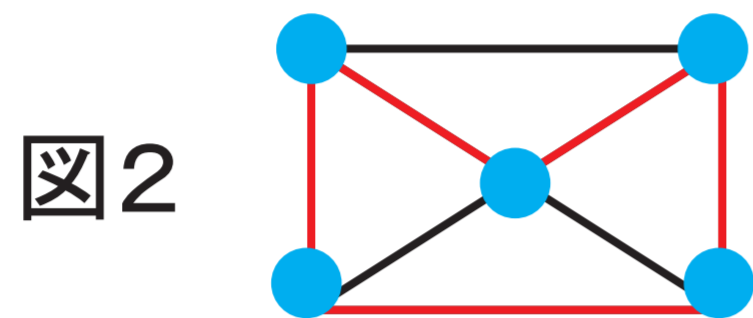
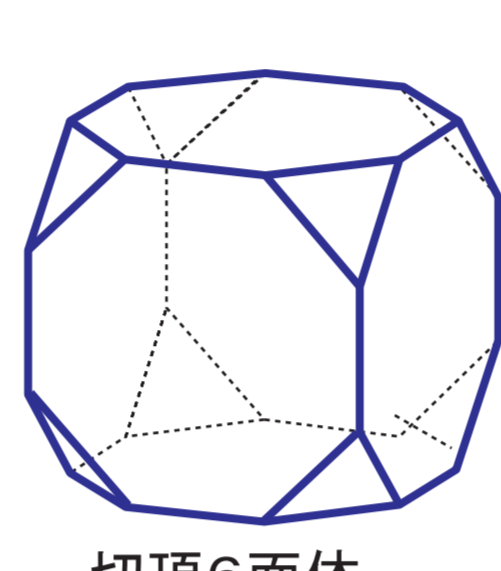


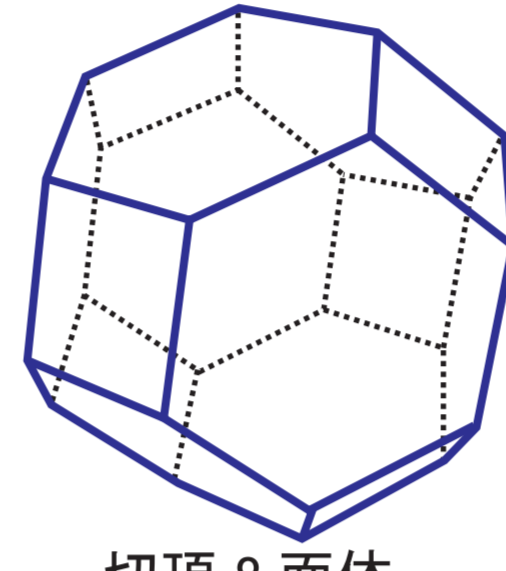
図2

半正多面体 (アルキメデス立体) とは・

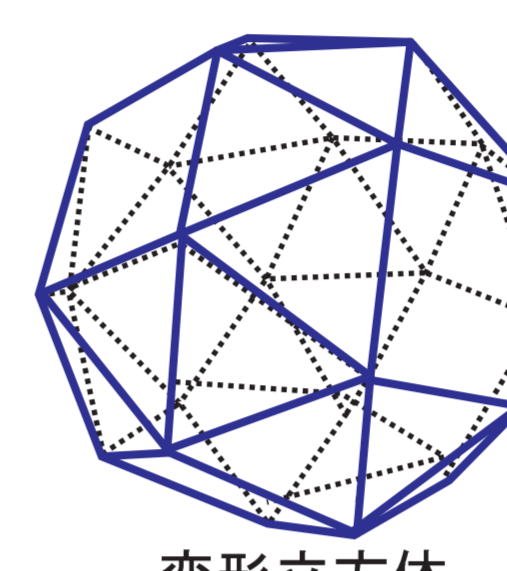
4つ以上の平面に囲まれた立体を「多面体」と呼びます。半正多面体とは次の条件を満たしている多面体のことです。①すべての面が正多角形 ②頂点に集まる面が同じ形 ③角柱、反角柱、ミラーの立体ではない



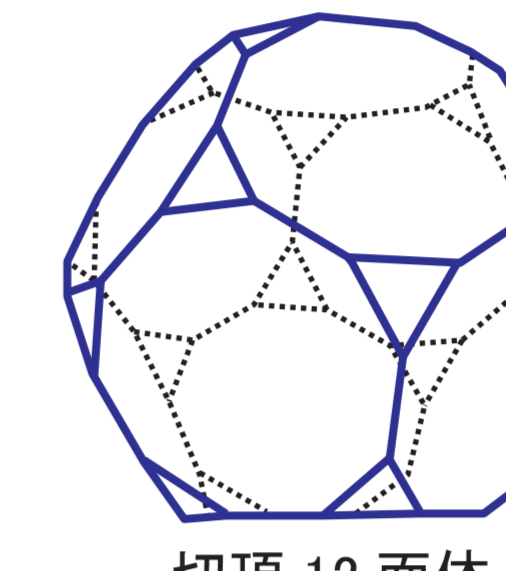
切頂6面体



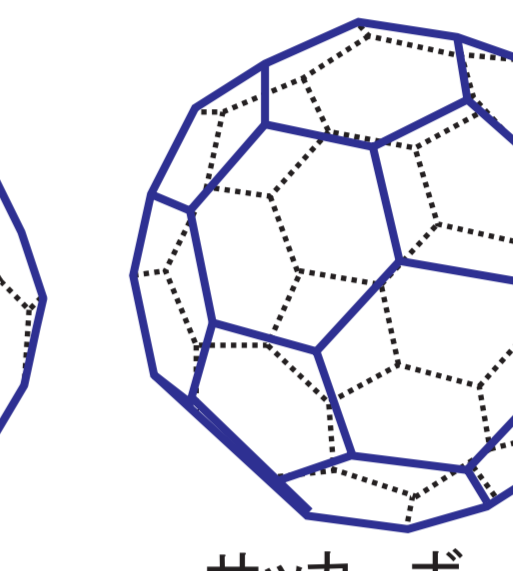
切頂8面体



変形立方体



切頂12面体

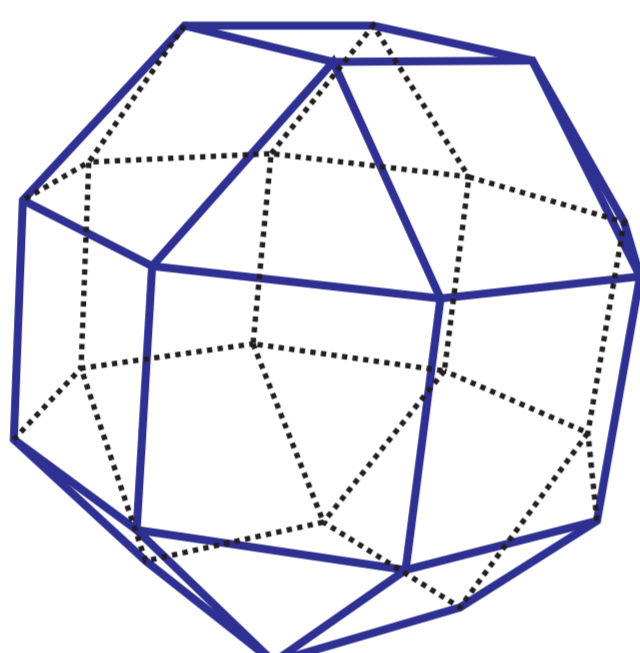
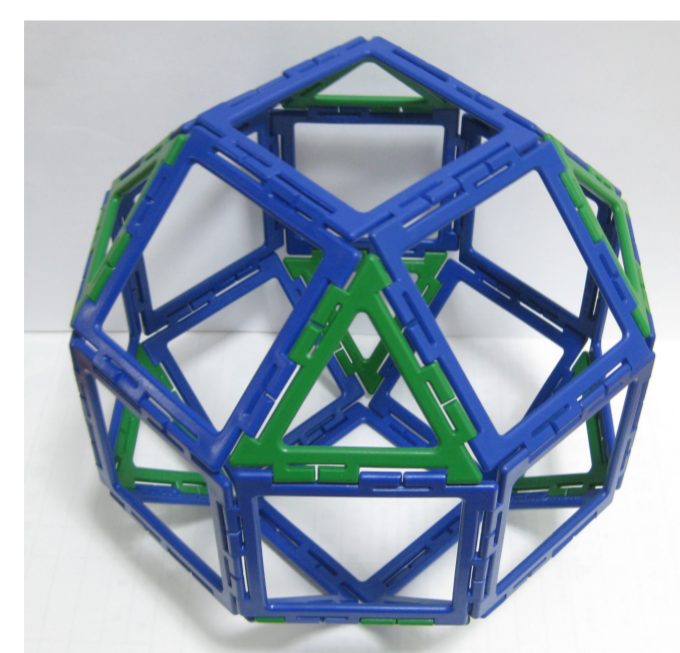


サッカーボール

ハミルトン閉路探索・・・戦略

今回、ハミルトン閉路を立体図形の中に具体的に見つけるために私は、まず半正多面体を実際に組み立て、建物のように見立てて高度ごとにレイヤー(階層)に分けました。そして、スタートの頂点から戻ってくる頂点を残して他の頂点を埋め、次のレイヤーへ、ということ続け、底まで来たら上に戻る、という戦略を立ててハミルトン閉路を探索しました。しかし、同じレイヤーの頂点がつながっていない半正多面体もあったので、経路が途切れた場合は上下どちらかのレイヤーへジャンプする戦術へ変更し、ハミルトン閉路を探索しました。

斜方立方8面体 (正三角形が8、正方形が18)

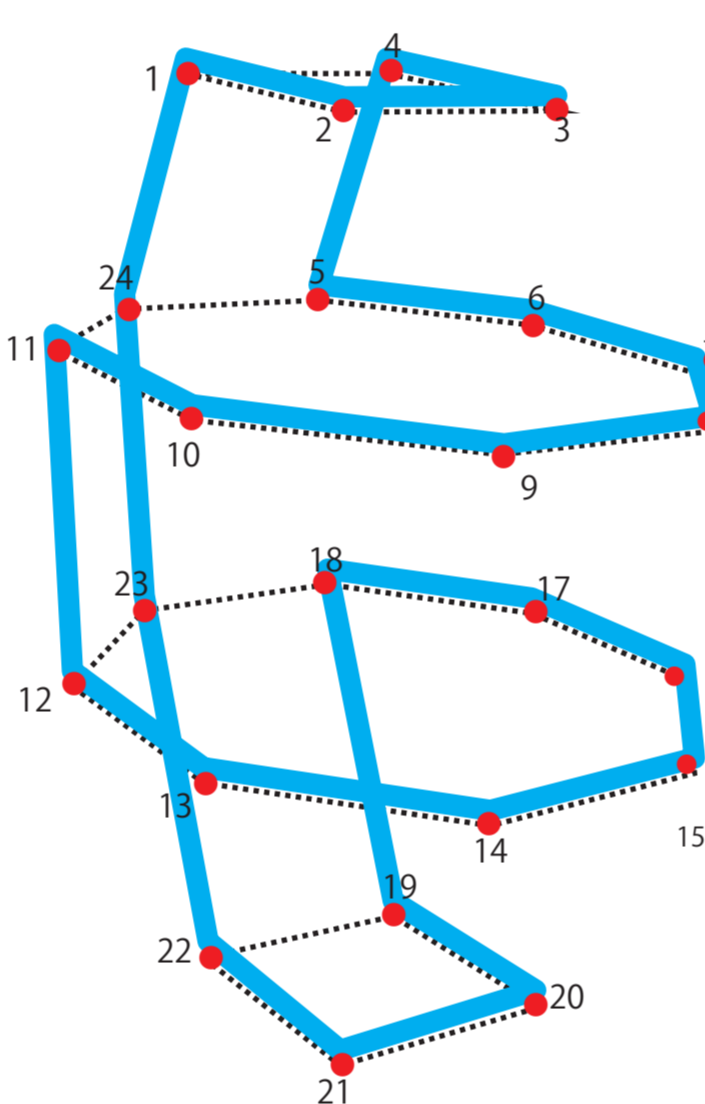


レイヤー1

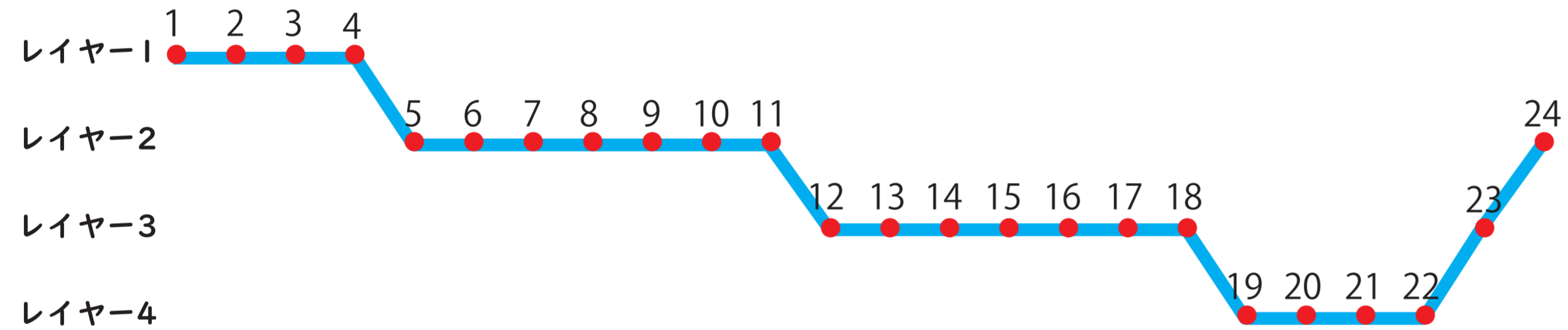
レイヤー2

レイヤー3

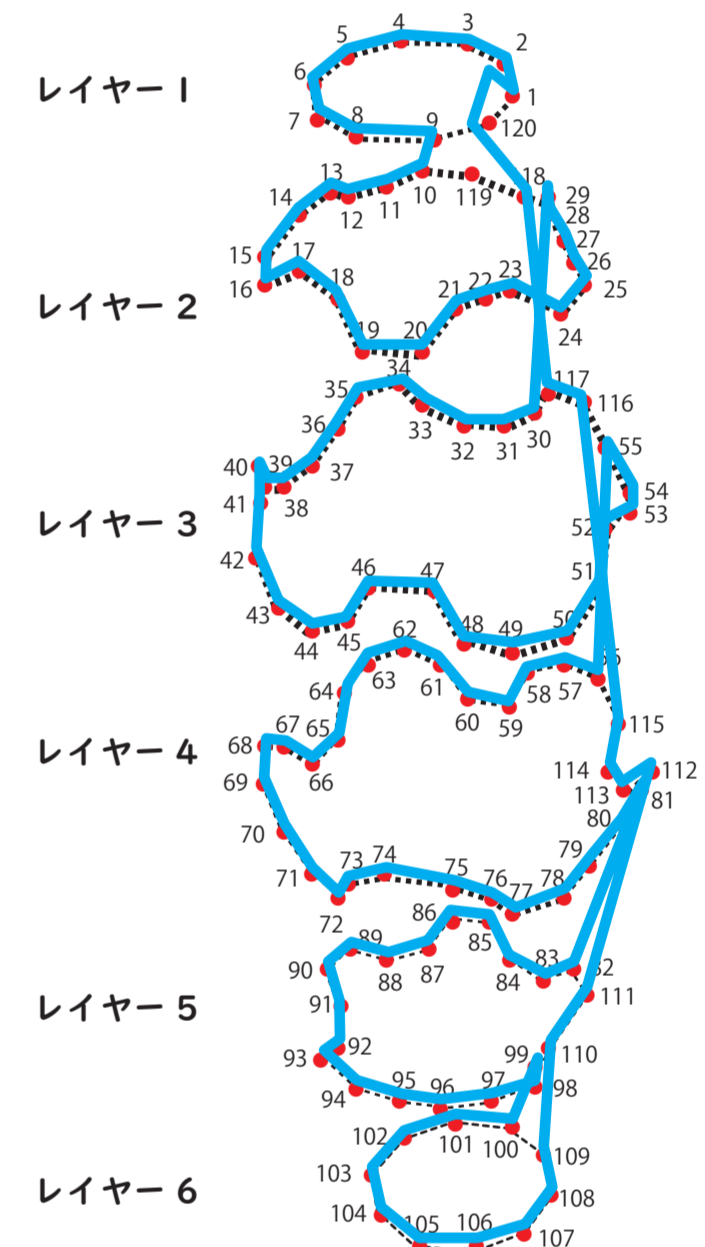
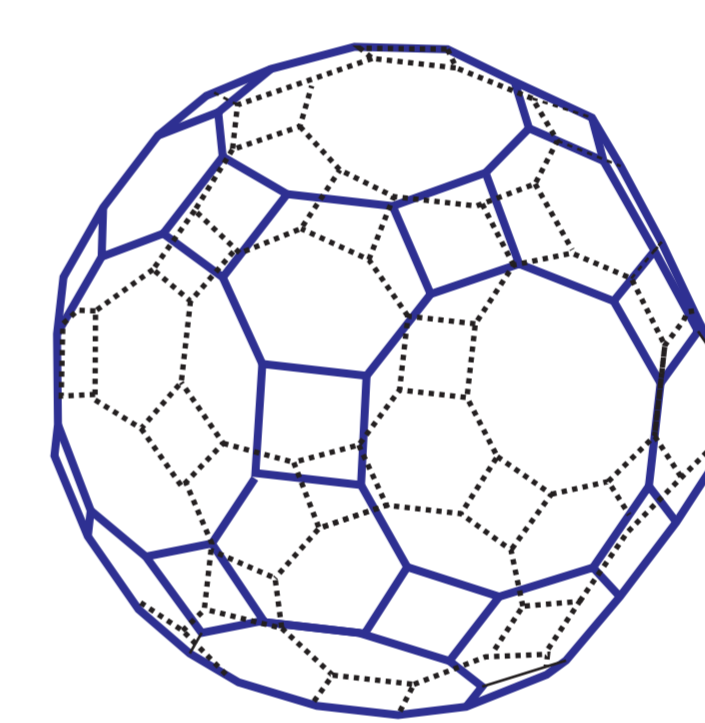
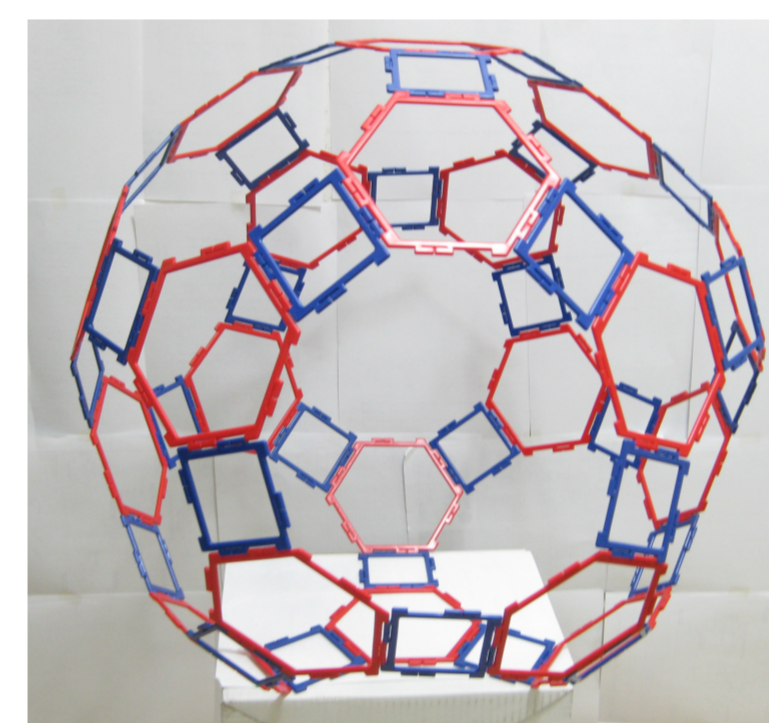
レイヤー4



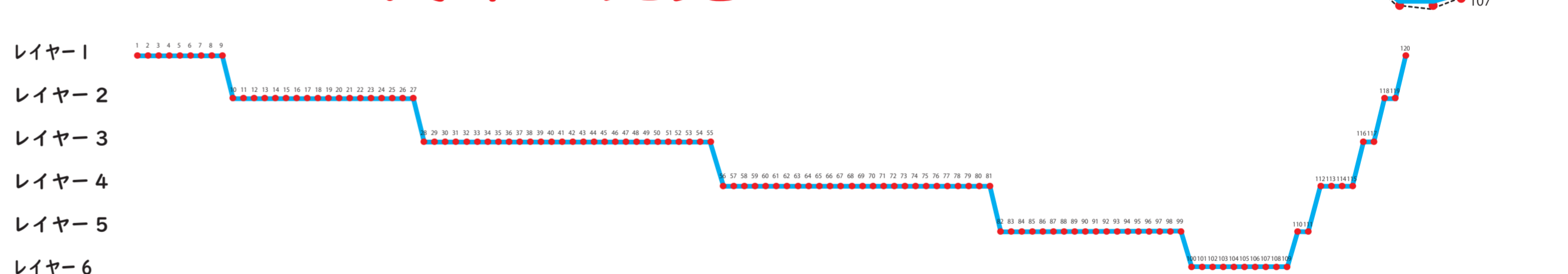
ハミルトン閉路 発見



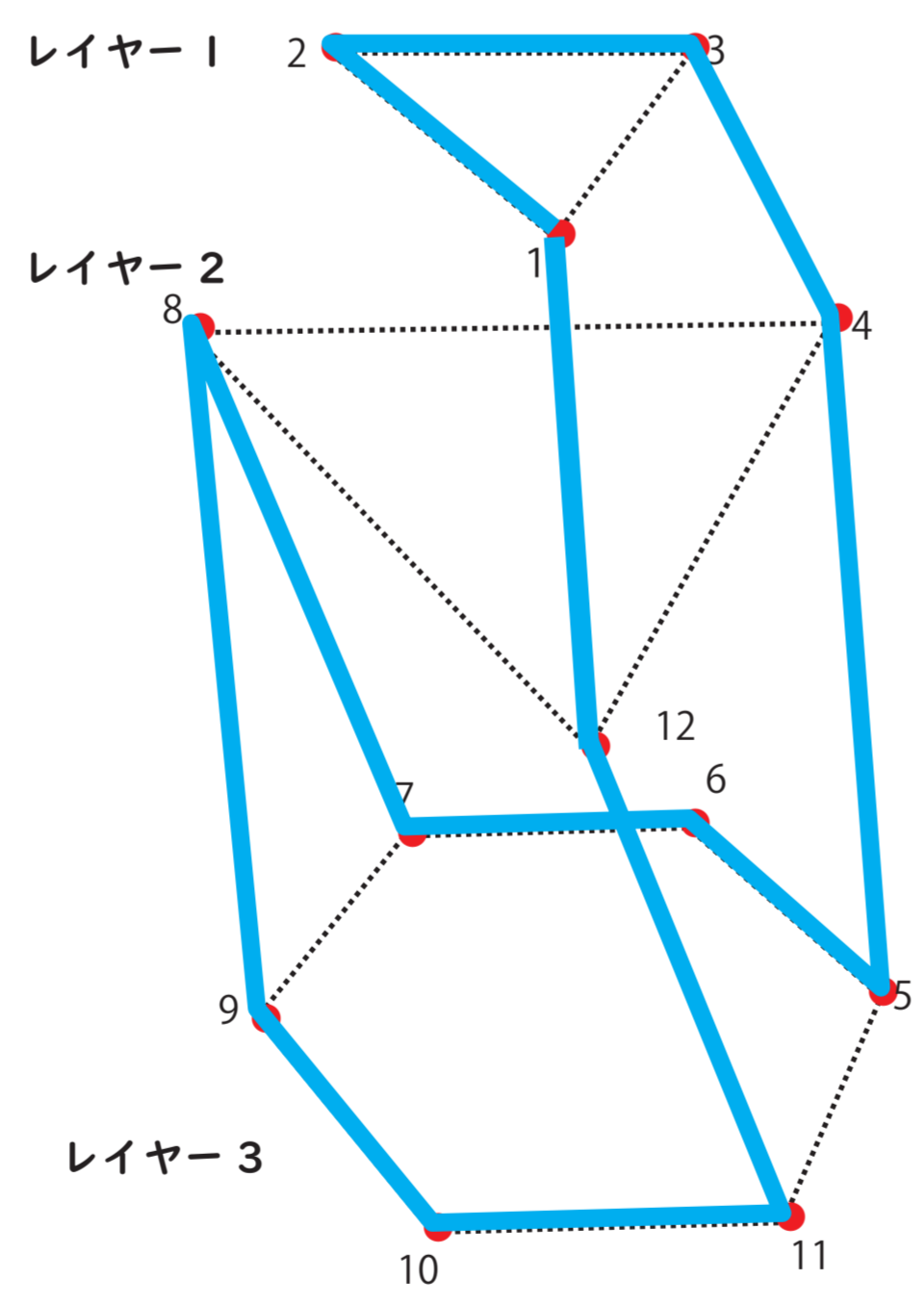
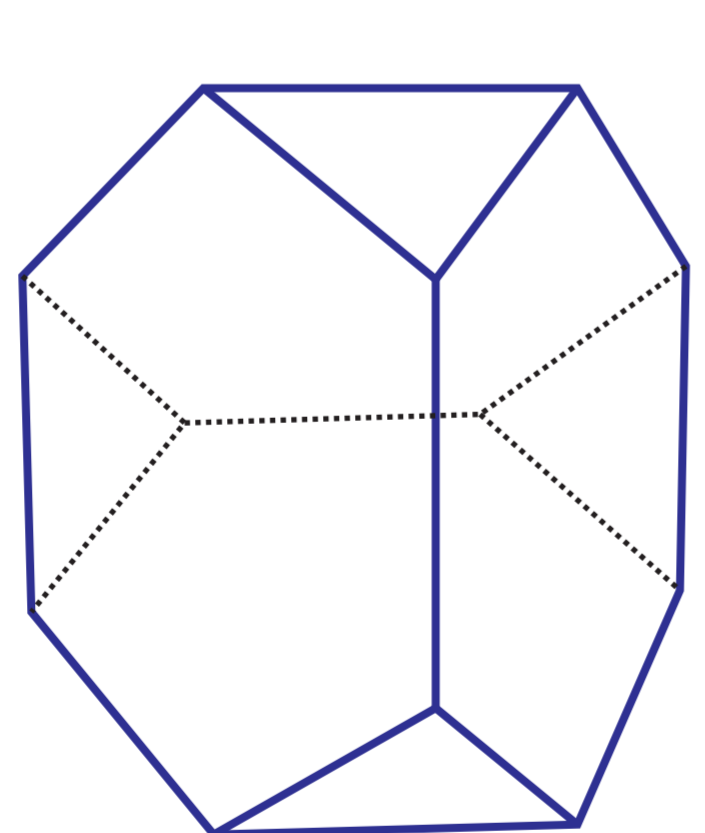
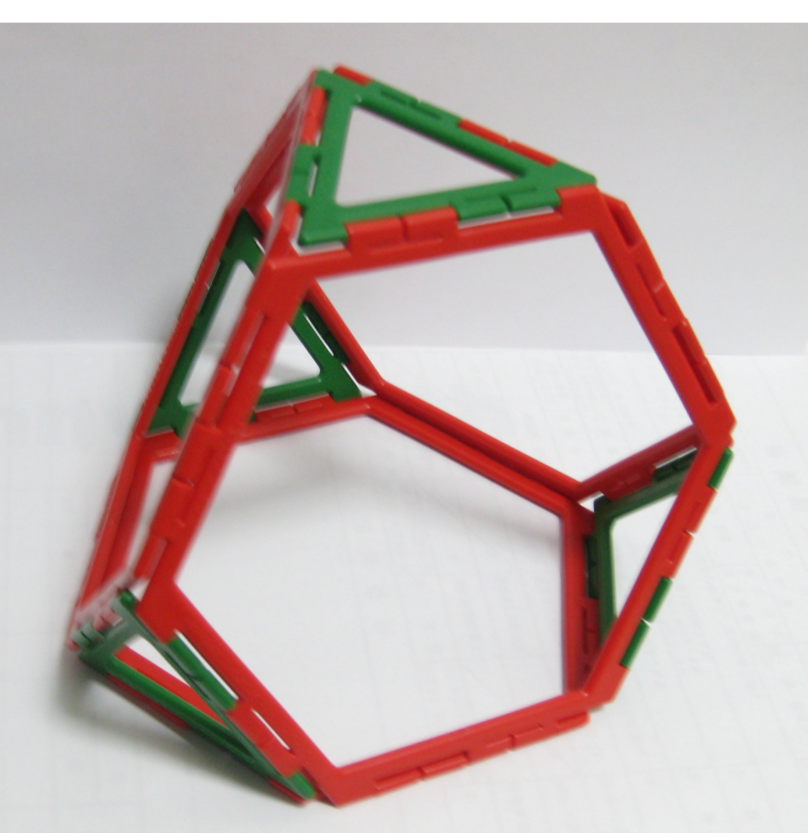
斜方切頂二十・十二面体 (正三角形が30、正六角形が20、正十角形が12)



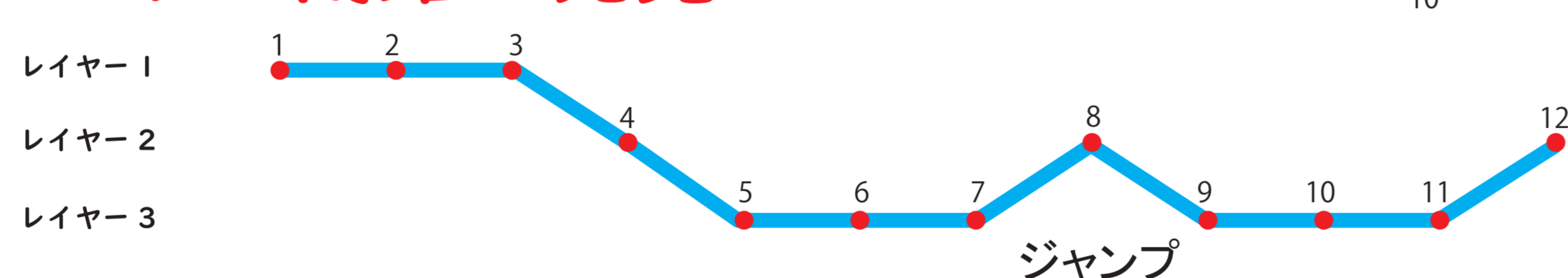
ハミルトン閉路 発見



切頂四面体 (正三角形が4、正六角形が4)

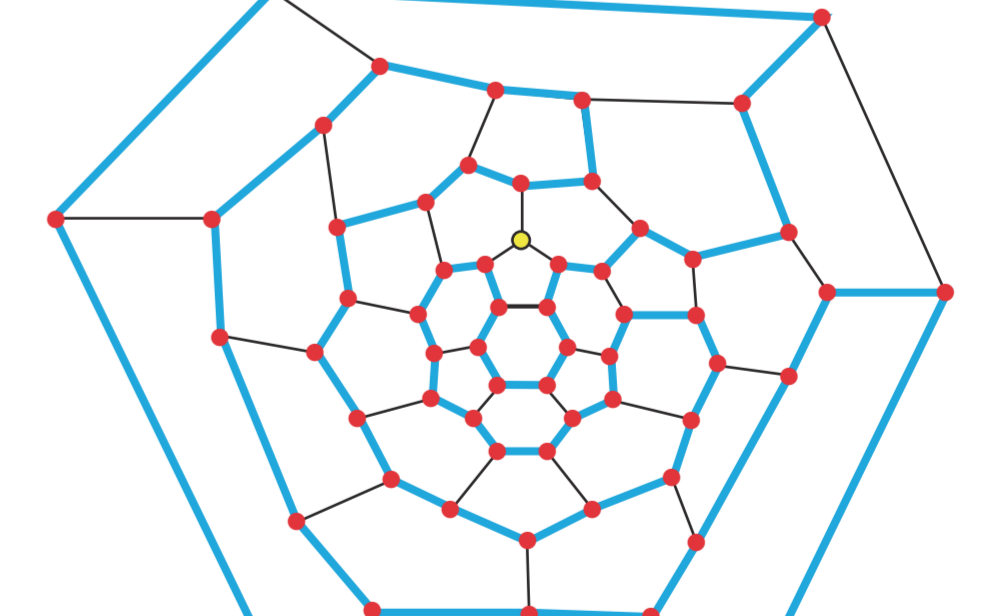
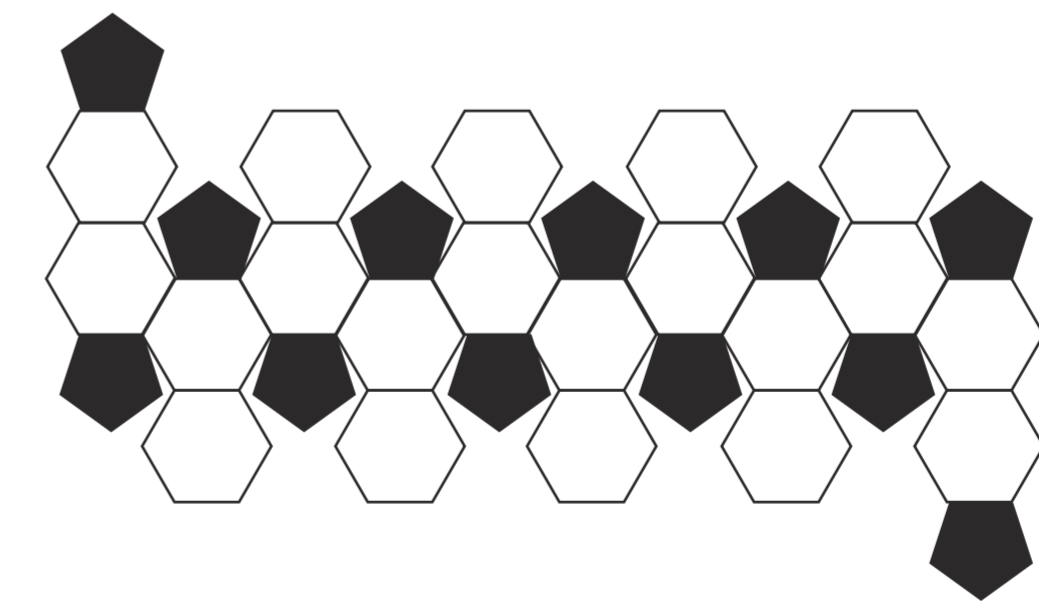
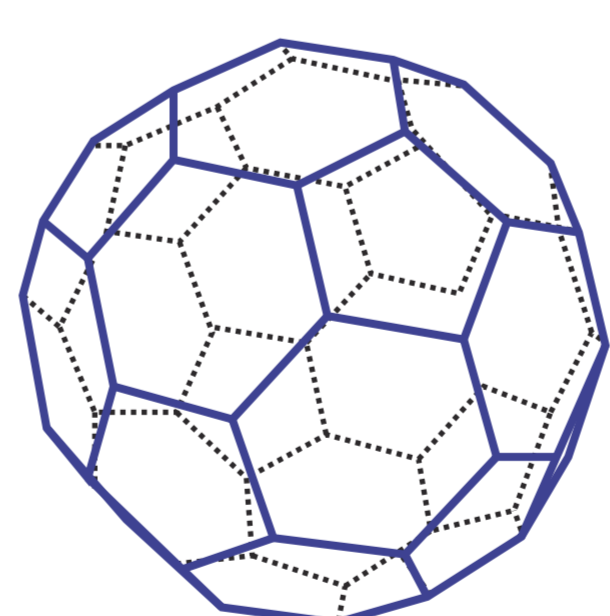


ハミルトン閉路 発見



切頂二十面体 (サッカーボール) メルカトル図法風展開図

切頂二十面体の経路探索は難しく3次元グラフ化、2次元グラフ化でも上手くいきませんでした。そこで展開図から考えていました。展開図は辺が離れている部分がありグラフ化は無理と考えていましたが展開図をメルカトル風図法で作る手法を思いつきました!



切頂二十面体 (サッカーボール) メルカトル図法風展開図

ハミルトン閉路 なし

12 / 13

今回の研究では、戦略を変更して探索することもあり、色々工夫が必要でした。結果、半正多面体十三種類のうち十二種類においてハミルトン閉路を見つける事が出来ました。見つけられなかった切頂二十面体においては、当初の戦略で出来なかったためメルカトル図法を用いてグラフを平面化して簡単にしました。しかし、それでも見つけられなかったため、さらに新たな戦略を練ってハミルトン閉路を見つけたいと思います。ちなみに、経路の数を「場合の数」の「道順」の方法で切頂四面体を例にとると、頂点が12あるので、単純な計算では3×2の9乗=1536通りあります。判定が難しいのは、ハミルトン閉路は戻ることを前提に先程の多大な経路の中から進む道を選ばないといけなからだと思います。それでも判定法のヒントは上記のメルカトル図法風のような平面上のグラフに現れるのではないかと考えます。よりたくさんデータを取って研究を継続していきたいです。